ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ИНКЛЮЗИВНОГО ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

**МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
ГУМАНИТАРНО-ЭКОНОМИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ**
ВОЛГОГРАДСКИЙ ФИЛИАЛ

УТВЕРЖДАЮ
Директор Волгоградского
филиала МГГЭУ
_________ Рябошапка А.Г.

«27» _______ 2022 г.

УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКОЕ ПОСОБИЕ

по дисциплине

МАТЕМАТИКА

Волгоград 2022 г.

ОДОБРЕНА
предметно-цикловой
комиссией
Общеобразовательных дисциплин

протокол № _9__
от « _20_» _апреля_ 2022 г.

Разработана на основе ФГОС 10.02.05 Обеспечение информационной безопасности автоматизированных систем, ФГОС, 09.02.05 Прикладная информатика (по отраслям),
ФГОС 09.02.07 Информационные системы и программирование

председатель предметно-цикловой комиссии
__________О.В. Сарафанова

Заместитель директора по учебно-методической работе
_________ О.И. Казакова

составитель (автор): Сарафанова Ольга Владимировна, преподаватель высшей квалификационной категории ВФ МГГЭУ

рецензенты: Кузнецова Светлана Валерьевна, преподаватель высшей квалификационной категории ВФ МГГЭУ

Гвоздкова Ирина Николаевна, к.п.н., доцент, заведующий кафедрой естественных наук и профессиональных коммуникаций АНО ВО „Волгоградский институт бизнеса"

Комитет образования, науки и молодежной политики
Волгоградской области
Совет РУМО профессиональных образовательных организаций
Волгоградской области

400107 г. Волгоград, проспект маршала Г.К. Жукова, 83. Телефон 36-63-14

РЕШЕНИЕ
Совета РУМО

Учебно-методическое пособие по учебной дисциплине «Математика», автор - составитель О.В. Сарафанова, ФГБОУ инклюзивного высшего образования «Московский государственный гуманитарно-экономический университет», Волгоградский филиал, соответствует требованиям РУМО в системе СПО Волгоградской области в части комплексного учебно-методического обеспечения и рекомендовано Советом РУМО в качестве учебного издания для использования в учебном процессе профессиональных образовательных организаций, реализующих программы среднего профессионального образования.

Эксперт
РУМО профессиональных
образовательных организаций СПО
Волгоградской области, к.ю.н. Скробов А. А.

УМО
Комитет образования и науки Волгоградской области
Учебно-методическое объединение профессионального образования в системе среднего профессионального образования

Основание: протокол № 7 от 16.06.2022 г.

Содержание

Оглавление

Введение 5
Раздел 1. Матрицы и определители 6
Тема 1.1. Понятие матрицы, виды матриц, операции над матрицами 6
Тема 1.2. Определители 9
Тема 1.3. Обратная матрица 10
Тема 4. Системы линейных уравнений 12
Раздел 2. Предел числовой последовательности. Предел функции 15
Тема 2.1. Предел числовой последовательности. Понятие предела функции 15
Тема 2.2. Свойства пределов. Приемы вычисления пределов 17
Тема 2.3. Предел и непрерывность функции. 21

Введение

Учебно-методическое пособие по дисциплине «Математика», разделы «Основы линейной алгебры» и «Предел функции» по дисциплине Математика, входящей в Математический и общий естественнонаучный учебный цикл предназначен для изучения разделов «Основы линейной алгебры» и «Предел функции» в профессиональных образовательных организациях СПО, реализующих ФГОС СПО.

Учебно-методическое пособие разработано на основе требований ФГОС СПО, в частности ФГОС 10.02.05 Обеспечение информационной безопасности автоматизированных систем, ФГОС, 09.02.05 Прикладная информатика (по отраслям), ФГОС 09.02.07 Информационные системы и программирование.

Изучение учебной дисциплины «Математика» ориентировано на достижение следующих целей: формирование знаний, умений, навыков и компетенций у студентов с местом и ролью математики в современном мире; развитие их интеллекта и способностей к логическому и алгоритмическому мышлению; обучение основным математическим методам, необходимым для анализа и моделирования устройств, процессов и явлений при поиске оптимальных решений для осуществления научно-технического прогресса и выбора наилучших способов реализации этих решений, методам обработки и анализа результатов численных и натурных экспериментов и использование их в профессиональной деятельности.

Освоение содержания учебной дисциплины «Математика» обеспечивает решение следующих задач: изучить на примерах математических понятий и методов материалистической диалектики, сущность научного подхода, специфику математики и ее роль в осуществлении процессов становления современной экономики; изучить роль математического знания в деятельности специалистов, прикладные задачи в профессиональной области.

Учебно-методическое пособие может быть использовано в учреждениях среднего профессионального образования, реализующих программу подготовки специалистов среднего звена.

Учебно-методическое пособие создано для работы на занятиях, при выполнении домашнего задания и подготовки к текущему и итоговому контролю по дисциплине. Учебно-методическое пособие включает теорию и практические примеры с подробным решением, а также задания для самостоятельного решения для закрепления тем дисциплины.

По каждой теме в Учебно-методическом пособии перечислены основные понятия и термины, краткая информация по теории рассматриваемого вопроса, а также приведены примеры решения стандартных задач.

Приступая к изучению нового раздела необходимо обращать внимание на определения, формулы и другую выделенную информацию. Внимательно рассмотрите примеры и прочитайте пояснения к ним.

Раздел 1. Матрицы и определители

Тема 1.1. Понятие матрицы, виды матриц, операции над матрицами

Понятие матрицы

Матрица размера $m \times n$ - это прямоугольная таблица чисел, содержащая m строк и n столбцов. **(1.1)**

Числа, составляющие матрицу называются ***элементами матрицы*** **(1.2)**

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 & 2 & 1/3 \\ 5 & -2 & 0 & 3 & 7 \\ 11 & 18 & -3/8 & 6 & 8 \end{pmatrix},$$

матрица размером 3×5 (3 строки, 5 столбцов)

A имя матрицы

$a_{13}=-1$; $a_{25}=7$; $a_{33}=-3/8$ элементы матрицы

Виды матриц

Квадратная - это такая матрица, у которой количество строк и столбцов одинаково. **(1.3)**

Побочная диагональ

$$B = \begin{pmatrix} 1 & -6 & 7 \\ 6 & 8 & 0 \\ -1 & 5 & 3 \end{pmatrix},$$

Главная диагональ

Матрица строка (столбец) - это матрица, которая состоит из одной строки (одного столбца). **(1.4)**

$$A = \begin{pmatrix} 12 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

матрица – столбец

$$B = \begin{pmatrix} -3 & 5 & 15 \end{pmatrix}$$

матрица – строка

Диагональная матрица - это квадратная матрица, у которой все элементы вне главной диагонали равны нулю. **(1.5)**

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 19 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix},$$

Единичная матрица - это диагональная матрица, у которой все диагональные элементы раны 1. (Обозначается E). **(1.6)**

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

Нуль-матрица - это такая матрица у которой все элементы равны нулю. **(1.7)**

$$0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

Операции над матрицами

Сложение (вычитание)
(определено только для матриц одинакового размера)
соответствующие (с одинаковыми номерами) элементы матриц складываются (вычитаются).

Пример 1.1.

$$\text{Даны } A=\begin{pmatrix}3 & 8 & 4\\ -2 & 0 & 4\\ 9 & 2 & 7\end{pmatrix} \text{ и } B=\begin{pmatrix}1 & -6 & 7\\ 6 & 8 & 0\\ -1 & 5 & 3\end{pmatrix}, \text{ найти} A+B$$

Решение.

$$A+B=\begin{pmatrix}3+1 & 8+(-6) & 4+7\\ -2+6 & 0+8 & 4+0\\ 9+(-1) & 2+5 & 7+3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4 & 2 & 11\\ 4 & 8 & 4\\ 8 & 7 & 10\end{pmatrix}$$

Результат вычислений **–** матрица такого же размера

(1.8)

Умножение матрицы на число
каждый элемент матрицы умножается на это число.

Пример 1.2.

$$\text{Дано: } A=\begin{pmatrix}3 & 8 & 4\\ -2 & 0 & 4\\ 9 & 2 & 7\end{pmatrix}, \ \lambda=3, \text{ найти} \lambda\cdot A$$

Решение.

$$\lambda\cdot A=\begin{pmatrix}3*3 & 3*8 & 3*4\\ 3*(-2) & 3*0 & 3*4\\ 3*9 & 3*2 & 3*7\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}9 & 24 & 12\\ -6 & 0 & 12\\ 27 & 6 & 21\end{pmatrix}$$

Результат **–** матрица такого же размера

(1.9)

Умножение матриц $(A\cdot B)$
(определено только когда число столбцов первой матрицы($A_{m\times n}$ *) равно числу строк второй матрицы(* $B_{n\times k}$ *))*
Произведением матриц $(A\cdot B)$ называется такая матрица $C_{m\times k}$ С, каждый элемент c_{ij} которой равен сумме произведений элементов i-й строки матрицы А на соответствующие элементы j-го столбца матрицы В.

Пример 1.3.

$$\text{Даны } A=\begin{pmatrix}3 & 8 & 4\\ -2 & 0 & 4\\ 9 & 2 & 7\end{pmatrix} \text{ и } B=\begin{pmatrix}1 & -6\\ 6 & 8\\ -1 & 5\end{pmatrix}, \text{ найти } C=A\cdot B$$

Решение

$c_{11}=3*1+8*6+4*(-1)=47$ (*первая строка матрицы A и первый столбец матрицы B*)

$c_{12}=3*(-6)+8*8+4*5=66$ (*первая строка матрицы A и второй столбец матрицы B*)

$c_{21}=-2*1+0*6+4*(-1)=-6$ (*вторая строка матрицы A и первый столбец матрицы B*)

$c_{22}=-2*(-6)+0*8+4*5=32$ (*вторая строка матрицы A и второй столбец матрицы B*)

$c_{31}=9*1+2*6+7*(-1)=14$ (*третья строка матрицы A и первый столбец матрицы B*)

$c_{32}=9*(-6)+2*8+7*5=105$ (*третья строка матрицы A и второй столбец матрицы B*)

$$\text{т.о. } C=\begin{pmatrix}47 & 66\\ -6 & 32\\ 14 & 105\end{pmatrix}$$

В общем случае для матриц $A\cdot B\neq B\cdot A$

Результат **–** *матрица.*

(1.10)

Транспонирование матрицы строки и столбцы матрицы меняются местами с сохранением порядка.	**Пример 1.4.** *Дана матрица* $A=\begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 & 2 & 1/3 \\ 5 & -2 & 0 & 3 & 7 \\ 11 & 18 & -3/8 & 6 & 8 \end{pmatrix}$, *найти* A^T. *Решение*: $A^T=\begin{pmatrix} 3 & 5 & 11 \\ 0 & -2 & 18 \\ -1 & 0 & -3/8 \\ 2 & 3 & 6 \\ 1/3 & 7 & 8 \end{pmatrix}$ Если транспонировать матрицу $A_{m\times n}$, то ***Результат*** транспонирования – матрица $A^T_{n\times m}$ **(1.11)**
Обратная матрица Матрица A^{-1} есть обратная к квадратной матрице A, если $A^{-1}\cdot A = A\cdot A^{-1} = E$, где E – единичная матрица того же порядка.	Существование обратной матрицы и алгоритм вычисления обратной матрицы см. ниже . **(1.12)**

Задания для закрепления темы «Понятие матрицы, виды матриц, операции над матрицами»

Даны матрицы A , B, C

Найти: а) A+B, B – A б) D =2B+4A, K= 2A-3B+E, где E – единичная матрица в) AB, AC г) B^T

Вариант 1			**Вариант 2**		
A	**B**	**C**	**A**	**B**	**C**
$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 7 & 5 & -2 \\ -2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 3 \\ 2 & -6 & 1 \\ -7 & 1 & 5 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 4 & 0 \\ 7 & -1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 4 \\ 7 & 5 & -2 \\ -2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -5 \\ 8 & 4 & -2 \\ -2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 5 & 2 \\ 7 & -1 \end{pmatrix}$
Вариант 3			**Вариант 4**		
A	**B**	**C**	**A**	**B**	**C**
$\begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 \\ -7 & 1 & -2 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 7 & 0 & -2 \\ -3 & -2 & 5 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 0 & 4 \\ -1 & 7 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -3 & 6 & -2 \\ -2 & 4 & 5 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -6 \\ 9 & 4 & -3 \\ -2 & 5 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 4 & 1 \\ 8 & -3 \end{pmatrix}$

Тема 1.2. Определители

Результат вычисления определителя – число

Обозначение $|A|$ - определитель матрица А

Определитель матрицы первого порядка - это сам элемент этой матрицы

Пример 1.5.

Найти определитель матрицы $A = (15)$

Решение:

$|A| = 15$

(1.13)

Определитель матрицы второго порядка - произведение элементов матрицы на главной диагонали минус произведение элементов матрицы на побочной диагонали.

Пример 1.6.

Найти определитель матрицы $A = \begin{pmatrix} 3 & 7 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}$

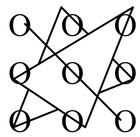
Решение:

$|A| = 3*7-(-2)*7 = 49, \quad т.о. \quad |A| = 49$

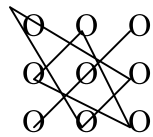
(1.14)

Определитель матрицы третьего порядка Вычисляется по правилу Сарруса (привило треугольника): произведение элементов на главной диагонали плюс произведение элементов на первом главном треугольнике, плюс произведение элементов на втором главном треугольнике минус произведение элементов на побочной диагонали, минус произведение элементов на первом побочном треугольнике, минус произведение элементов на втором побочном треугольнике.

главные



побочные



Пример 1.7.

Найти определитель матрицы $A = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 7 \\ 1 & 2 & 3 \\ -4 & 4 & 4 \end{pmatrix}$

Решение:

$|A| = 2*2*4 \quad главная \quad даигональ$

$+1*4*7 \quad первый \quad главный \quad треугольник$

$+5*3*(-4) \quad второй \quad главный \quad треугольник$

$-7*2*-4 \quad побочная \quad диагональ$

$-1*5*4 \quad первый \quad побочный \quad треугольник$

$-4*3*2 \quad второй \quad побочный \quad треугольник$

$= -1$

$т.о. \quad |A| = -1$

(1.15)

Задания для закрепления темы «Определители»

Вычислить определитель матрицы

Вариант 1	**Вариант 2**	**Вариант 3**	**Вариант 4**
$\begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 5 & -3 & 2 \\ -2 & 4 & -4 \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 3 & 2 \\ -2 & 4 & 5 \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & -4 \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} 5 & -1 & 9 \\ 7 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & -1 \end{vmatrix}$

Тема 1.3. Обратная матрица

Теорема (необходимое и достаточное условие существования обратной матрицы)

Обратная матрица A^{-1} существует (и единственная) тогда и только тогда, когда Исходная матрица А невырожденная (т.е. $|A| \neq 0$) **(1.16)**

Минором M_{ij} элемента a_{ij} матрицы n-го порядка называется определитель матрицы (n-1)-го порядка, полученной из матрицы А вычеркиванием i-й строки и j-го столбца. **(1.17)**

Пример 1.8. Найти минор M_{13} элемента a_{13} матрицы $A = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 7 \\ 1 & 2 & 3 \\ -4 & 4 & 4 \end{pmatrix}$

Решение: $M_{13} = \begin{vmatrix} 2 & 5 & 7 \\ 1 & 2 & 3 \\ -4 & 4 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -4 & 4 \end{vmatrix} = 1 \cdot 4 - 2 \cdot (-4) = 12$

Определение ***Алгебраическим дополнением*** A_{ij} элемента a_{ij} матрицы n-го порядка называется его минор, взятый со знаком $(-1)^{i+j}$, *т.е.* $A_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot M_{ij}$ **(1.18)**

(Пример вычисления алгебраических дополнений см ниже пример **1.9.** п.4.)

Алгоритм вычисления обратной матрицы (определение см **(1.12)**

1. Найти определитель исходной матрицы. $|A|$
2. Если $|A| = 0$, то обратная матрица не существует, алгоритм закончен; если $|A| \neq 0$, то обратная матрица существует, перейти к п.3.
3. Найти A^T, транспонированную к матрице А (см **1.11**)
4. Найти все алгебраические дополнения элементов матрицы A^T (см ….) и составить из них присоединенную матрицу $\tilde{A}$
5. Вычислить обратную матрицу по формуле $A^{-1} = \dfrac{1}{|A|} \cdot \tilde{A}$
6. Проверить правильность вычислений: $A^{-1} \cdot A = A \cdot A^{-1} = E$

Пример 1.9. Найти матрицу, обратную к данной:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 5 & 2 & 4 \\ 7 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

Решение:

1. Найдем определитель матрицы. $|A| = -1$. (см пример **1.7**)
2. $|A| = -1 \neq 0$, значит обратная матрица существует.
3. Транспонируем матрицу А, получим $A^T = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 7 \\ 1 & 2 & 3 \\ -1 & 4 & 4 \end{pmatrix}$
4. Найдем алгебраические дополнения всех элементов транспонированной матрицы

$A_{11}^{T} = (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 4 \end{vmatrix} = 8-12 = -4$ $\quad A_{23}^{T} = (-1)^{2+3} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} = -(8+5) = -13$

$A_{12}^{T} = (-1)^{1+2} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} = -(4+3) = -7$ $\quad A_{31}^{T} = (-1)^{3+1} \cdot \begin{vmatrix} 5 & 7 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 15-14 = 1$

$A_{13}^{T} = (-1)^{1+3} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} = 4+2 = 6$ $\quad A_{32}^{T} = (-1)^{3+2} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 7 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 6-7 = 1$

$A_{21}^{T} = (-1)^{2+1} \cdot \begin{vmatrix} 5 & 7 \\ 4 & 4 \end{vmatrix} = -(20-28) - 8$ $\quad A_{33}^{T} = (-1)^{3+3} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 4-5 = -1$

$A_{22}^{T} = (-1)^{2+2} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 7 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} = 8+7 = 15$

Составляем из этих элементов присоединенную матрицу $\widetilde{A} = \begin{pmatrix} -4 & -7 & 6 \\ 8 & 15 & -13 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

5. Вычисляем обратную матрицу по формуле

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot \widetilde{A} = \frac{1}{-1} \cdot \begin{pmatrix} -4 & -7 & 6 \\ 8 & 15 & -13 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 7 & -6 \\ -8 & -15 & 13 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad т.о.\ A^{-1} = \begin{pmatrix} 4 & 7 & -6 \\ -8 & -15 & 13 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

6. Проверяем правильность вычислений: $A^{-1} \cdot A = A \cdot A^{-1} = E$ (убедится в этом рекомендуем самостоятельно)

Свойства операций над матрицами (A, B, C – матрицы, λ –некоторое действительное число)

1) $A + B = B + A$
2) $(A + B) + C = A + (B + C)$
3) $\lambda \cdot (A + B) = \lambda \cdot A + \lambda \cdot B$
4) $A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$
5) $(A + B) \cdot C = AC + BC$
6) $\lambda \cdot (A \cdot B) = (\lambda A) \cdot B$
7) $A \cdot (B \cdot C) = (A \cdot B) \cdot C$ **(1.19)**

Свойства определителей:

1. Величина определителя не изменяется от замены строк столбцами.
2. Величина определителя от перестановки двух любых параллельных его рядов меняет знак на обратный.
3. Определитель с двумя одинаковыми параллельными рядами равен нулю.
4. Общий множитель элементов одного ряда можно вынести за знак определителя.
5. Величина определителя не изменяется, если к элементам одного ряда прибавить элементы параллельного ряда, умноженные на произвольное одинаковое число.

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 + mc_1 & b_1 + nc_1 & c_1 \\ a_2 + mc_2 & b_2 + nc_2 & c_2 \\ a_3 + mc_3 & b_3 + nc_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

Задания для закрепления темы «Обратная матрица»

Дана матрица А, найти обратную матрицу к матрице А, и сделать проверку.

№ Варианта	**1.**	**2.**	**3.**	**4.**
Матрица А	$\begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 0 & 2 & -2 \\ -2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & -3 & 4 \\ 5 & 1 & -2 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 5 & 2 & 8 \\ 7 & 0 & -2 \\ -2 & 1 & 6 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 7 & 5 & -2 \\ -2 & 3 & 0 \end{pmatrix}$

Тема 4. Системы линейных уравнений

<u>Общие понятия</u>

общий вид системы m линейных уравнений с n переменными

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1j}x_j + ... + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2j}x_j + ... + a_{2n}x_n = b_2 \\ .... \\ a_{i1}x_1 + a_{i12}x_2 + ... + a_{ij}x_j + ... + a_{in}x_n = b_i \\ .... \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mj}x_j + ... + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \quad (2.1)$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{m1} & a_{m2} & ... & a_{mn} \end{pmatrix} \mathbf{(1.20)}$$

матрица коэффициентов системы

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ ... \\ x_n \end{pmatrix} \mathbf{(1.21)}$$

матрица-столбец переменных системы

$$B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ ... \\ b_n \end{pmatrix} \mathbf{(1.22)}$$

матрица-столбец свободных членов

<u>Методы решения систем линейных уравнений</u>

1. Метод обратной матрицы

Система линейных уравнений (1) в матричной форме

$A \cdot X = B$

Решение этой системы будет столбец

$$X = A^{-1} \cdot B, \ \mathbf{(1.23)}$$

где A^{-1} матрица, обратная матрице A

2. Метод решения по формулам Крамера

Переменные системы находятся по формулам (при условии, что определитель системы отличен от нуля)

$$x_j = \frac{\Delta_j}{\Delta} \ \mathbf{(1.24)},$$

где Δ - определитель матрицы А; Δ_j - определитель, получаемый из матрицы А, заменой j-го столбца столбцом свободных членов.

3. Метод Гаусса

<u>Прямой ход метода Гаусса:</u> Составляют расширенную матрицу (A|B), приписывая к матрице А столбец свободных членов;

с помощью элементарных преобразований приводят эту матрицу к ступенчатому виду.

<u>Обратный ход метода Гаусса:</u> По ступенчатой матрице выписывают новую систему и решают ее методом исключения переменных, начиная с последних (по номеру) переменных находят все остальные.

Пример 1.10

Решить систему линейных уравнений методом обратной матрицы, по формулам Крамера, методом Гаусса

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 3 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = 11 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = 8 \end{cases}$$

Решение:

1. Методом обратной матрицы

$$A=\begin{pmatrix}1 & -1 & 1\\ 2 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 2\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}3\\ 11\\ 8\end{pmatrix},\quad X=\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}$$

$$X=A^{-1}\cdot B,\ \text{где}\ A^{-1}=\frac{1}{|A|}\cdot\widetilde{A},$$

$$A^{-1}=\frac{1}{5}\begin{pmatrix}1 & 3 & -2\\ -3 & 1 & 1\\ 1 & -2 & 3\end{pmatrix}$$

(*рекомендуем выполнить вычисления обратной матрицы самостоятельно*)

$$X=X=A^{-1}\cdot B=\frac{1}{5}\cdot\begin{pmatrix}1 & 3 & -2\\ -3 & 1 & 1\\ 1 & -2 & 3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}3\\ 11\\ 8\end{pmatrix}=\frac{1}{5}\cdot\begin{pmatrix}20\\ 10\\ 5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4\\ 2\\ 1\end{pmatrix},$$

т.о. $x_1-4,\ x_2=2,\ x_3=1$

2. По формулам Крамера

$$\Delta=|A|=\begin{vmatrix}1 & -1 & 1\\ 2 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 2\end{vmatrix}=5,$$

$$\Delta_1=\begin{vmatrix}3 & -1 & 1\\ 11 & 1 & 1\\ 8 & 1 & 2\end{vmatrix}=20,\quad \Delta_2=\begin{vmatrix}1 & 3 & 1\\ 2 & 11 & 1\\ 1 & 8 & 2\end{vmatrix}=10,\quad \Delta_3=\begin{vmatrix}1 & -1 & 3\\ 2 & 1 & 11\\ 1 & 1 & 8\end{vmatrix}=5$$

(*рекомендуем выполнить вычисление определителя самостоятельно*)

$$x_1=\frac{\Delta_1}{\Delta}=\frac{20}{5}=4,\quad x_2=\frac{\Delta_2}{\Delta}=\frac{10}{5}=2,\quad x_3=\frac{\Delta_1}{\Delta}=\frac{5}{5}=1,$$

т.о. $x_1=4,\quad x_2=2,\quad x_3=1$

3. Методом Гаусса

Прямой ход:

$$\begin{matrix}-2\\ \\ \\ \end{matrix}\left(\begin{array}{ccc|c}1 & -1 & 1 & 3\\ 2 & 1 & 1 & 11\\ 1 & 1 & 2 & 8\end{array}\right)\Leftrightarrow\ {-2/3}\left(\begin{array}{ccc|c}1 & -1 & 1 & 3\\ 0 & 3 & -1 & 5\\ 1 & 1 & 2 & 8\end{array}\right)\Leftrightarrow\left(\begin{array}{ccc|c}1 & -1 & 1 & 3\\ 0 & 3 & -1 & 5\\ 0 & 0 & 1/3 & 5/3\end{array}\right)$$

Обратный ход:

Выписываем последнюю строку получившейся матрицы в виде уравнения

$1/3x_3=5/3\ \Rightarrow\ x_3=1$

Выписываем вторую (снизу) строку получившейся матрицы в виде уравнения

$3x_2-x_3=5\ \Rightarrow$ *зная значение* x_3, *находим* x_2 $\qquad 3x_2-1=5\Rightarrow x_2=2,$

Выписываем третью (снизу) строку получившейся матрицы в виде уравнения

$x_1-x_2+x_3=3\ \Rightarrow$ *зная значение* x_3 *и* x_2, *находим* x_1 $\qquad x_1-2+1=3\Rightarrow x_1=4,$

т.о.$x_1=4,\quad x_2=2,\quad x_3=1$

Задания для закрепления темы «Решение систем линейных алгебраических уравнений»

Вариант 1. Решить системы, используя три разных способа

$$1.1\ \begin{cases} 2x - y - 2z = -1 \\ 2y + z = 3 \\ -2x - 2y + 2z = -2 \end{cases} \qquad 1.2\ \begin{cases} 2x + y - 3z = 7 \\ 2x + 3y + z = 1 \\ 3x + 2y + z = 6 \end{cases}$$

$$1.3\ \begin{cases} x - 2y = 0 \\ 2x - 4y = 0 \end{cases}$$

Вариант 2. Решить системы, используя три разных способа

$$2.1\ \begin{cases} 3x + y - 3z = 8 \\ 3y - z = 7 \\ 3x - y - 3z = 4 \end{cases} \qquad 2.2\ \begin{cases} 4x + y + 4z = -3 \\ x + y + 2z = -4 \\ 2x - y + 2z = 3 \end{cases}$$

$$2.3\ \begin{cases} 2x + y = 0 \\ 4x + 2y = 0 \end{cases}$$

Раздел 2. Предел числовой последовательности. Предел функции

Тема 2.1. Предел числовой последовательности. Понятие предела функции

Определение 2.1. Пусть каждому натуральному числу n сопоставлено вещественное число x_n. Тем самым заданы некоторые вещественные числа, определенным образом пронумерованные: $x_1, x_2, \ldots x_n \ldots$, тогда говорят – ***задана числовая последовательность***.

$x_1, x_2, \ldots x_n \ldots$ члены числовой последовательности

x_n общий (n-й член последовательности)

$\{x_n\}$ числовая последовательность

Определение 2.2. Числовая последовательность считается заданной, если указано правило или закон, с помощью которого по номеру места в последовательности всегда можно назвать (вычислить) число, стоящее на этом месте, т.о. числовое значение члена последовательности x_n зависти от n, т.е. является функцией от n.

Определение 2.3. Число A называется ***пределом числовой последовательности*** $\{a_n\}$, если для любого сколь угодно малого положительного числа $\xi > 0$ можно указать такое натуральное число N, что для всех членов последовательности с номерами $n > N$ выполняется неравенство $|a_n - A| < \xi$ т.е.

$$\lim_{n\to\infty} a_n = A \Rightarrow (\forall \xi > 0)(\exists N \in N)(\forall n > N)(|a_n - A| < \xi)$$

Предел функции в бесконечности

Определение 2.4. Число A называется пределом функции $y = f(x)$ при x стремящемся к бесконечности, если для любого даже сколь угодно малого положительного числа $\xi > 0$, найдется такое положительное число $S > 0$ зависящее от $\xi : S = S(\xi)$, что для всех x таких, что $|x| > S$, верно неравенство $|f(x) - A| < \xi$, т.е.

$$\lim_{n\to\infty} f(x) = A \Rightarrow (\forall \xi > 0)(\exists S = S(\xi))(\forall x : |x| > S)(|f(x) - A| < \xi)$$

Предел функции в точке

Определение 2.5. Число A называется пределом функции $y = f(x)$ при x стремящемся к x_0, если для любого даже сколь угодно малого положительного числа $\xi > 0$, найдется такое положительное число $\delta > 0$ $\xi : \delta = \delta(\xi)$, что для всех $x \neq x_0$ таких, что $|x - x_0| < \delta$, верно неравенство $|f(x) - A| < \xi$, т.е.

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = A \Rightarrow (\forall \xi > 0)(\exists \delta = \delta(\xi) > 0)(\forall x \neq x_0 : |x - x_0| < \delta)(|f(x) - A| < \xi)$$

Бесконечно малые величины

Определение 2.6. Функция $\alpha(x)$ называется ***бесконечно малой величиной***, если $\lim\limits_{x\to x_0(\infty)} = 0$

Теорема2.1. (Связь бесконечно малых величин с пределами функций)

$\left(\lim\limits_{x\to x_0(\infty)} = A\right) \Leftrightarrow (f(x) = A + \alpha(x)$, где $\alpha(x)$ бесконечно малая величина)

Свойства бесконечно малых величин

1)Если $\alpha_1(x), \alpha_2(x), \ldots \alpha_n(x)$, , бесконечно малые величины то

$\alpha_1(x) + \alpha_2(x) + \ldots + \alpha_n(x)$ бесконечно малая величина. **(2.1.)**

2) Если $\alpha(x)$ - бесконечно малая величина, $g(x)$ - функция, для которой $(\lim\limits_{x\to x_0(\infty)} g(x) \neq \infty)$, то $\alpha(x) \cdot g(x)$ - бесконечно малая величина. **(2.2.)**

3) Если $\alpha(x)$ - бесконечно малая величина, $g(x)$ - функция, для которой ($\lim\limits_{x\to x_0(\infty)} g(x)\neq 0$),

то $\dfrac{\alpha(x)}{g(x)}$ - величина бесконечно малая. **(2.3.)**

Бесконечно большая величина

Определение 3.6.

Функция $f(x)$ называется ***бесконечно большой величиной***, если $\lim\limits_{x\to x_0(\infty)} f(x)=\infty$

Свойства бесконечно больших величин.

1) Если $f(x)$ - бесконечно большая величина и $g(x)$ - функция, для которой ($\lim\limits_{x\to x_0(\infty)} g(x)\neq\infty$), то $f(x)\cdot g(x)$ - бесконечно большая величина. **(2.4.)**
2) Если $f(x)$ - бесконечно большая величина и $g(x)$ - ограниченная функция, то $f(x)+g(x)$ - величина бесконечно большая. **(2.5.)**
3) Если $f(x)$ - бесконечно большая величина и $g(x)$ - функция, для которой ($\lim\limits_{x\to x_0(\infty)} g(x)=c$), то $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ - величина бесконечно большая. **(2.6.)**

Теорема 3.2.(Связь между бесконечно малыми и бесконечно большими величинами)

Если $\alpha(x)$ - бесконечно малая величина, то $f(x)=\dfrac{1}{\alpha(x)}$ величина бесконечно большая, т.е.

если $\alpha(x)$ - бесконечно малая величина, то ($\lim\limits_{x\to x_0(\infty)}\dfrac{1}{\alpha(x)}=\infty$). **(2.7.)**

Если $f(x)$ - бесконечно большая величина, то $\alpha(x)=\dfrac{1}{f(x)}$ - величина бесконечно малая.**(2.8.)**

Тема 2.2. Свойства пределов. Приемы вычисления пределов

<u>Признаки существования пределов</u>

Пусть $f(x), \varphi(x)$ - функции, для которых существуют $\lim\limits_{x \to x_0(\infty)} f(x) = A,\ \lim\limits_{x \to x_0(\infty)} \varphi(x) = B$ тогда справедливы следующие теоремы:

Теорема (2.1.)

Функция не может иметь более одного предела.

Теорема(2.2.)

$$\lim_{x \to x_0(\infty)} \left[\ f(x) + \varphi(x)\ \right] = A + B$$

Теорема (2.3.)

$$\lim_{x \to x_0(\infty)} \left[\ f(x) \cdot \varphi(x)\ \right] = A \cdot B$$

Теорема(2.4.)

$$\lim_{x \to x_0(\infty)} \left[\ \frac{f(x)}{\varphi(x)}\ \right] = \frac{A}{B},\ B \neq 0$$

Таблица 2.1.

Соотношения пределов сумм, произведения и частного двух функций $f(x), \varphi(x)$

N п/п	$\lim\limits_{x \to x_0(\infty)} f(x)$	$\lim\limits_{x \to x_0(\infty)} \varphi(x)$	$\lim\limits_{x \to x_0(\infty)} \left[\ f(x) + \varphi(x)\ \right]$	$\lim\limits_{x \to x_0(\infty)} \left[\ f(x) \cdot \varphi(x)\ \right]$	$\lim\limits_{x \to x_0(\infty)} \left[\ \frac{f(x)}{\varphi(x)}\ \right]$
1	a	b	$a + b$	$a \cdot b$	$\frac{a}{b}, (b \neq 0)$
2	a	0	a	0	∞
3	a	∞	∞	$\infty\ (a \neq 0)$	0
4	∞	b	∞	$\infty\ (b \neq 0)$	∞
5	0	0	0	0	Неопределенность $\left[\frac{0}{0}\right]$
6	0	∞	∞	Неопределенность $[0 \cdot \infty]$	0
7	∞	0	∞	Неопределенность $[0 \cdot \infty]$	∞
8	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	Неопределенность $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$
9	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	Неопределенность $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$
10	$+\infty$	$-\infty$	Неопределенность $[\infty - \infty]$	$-\infty$	Неопределенность $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$
11	$-\infty$	$+\infty$	Неопределенность $[\infty - \infty]$	$-\infty$	Неопределенность $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$

Первый замечательный предел

$$\lim_{x\to 0}\frac{Sin\,x}{x}=1 \qquad \textbf{(3.9.)}$$

Второй замечательный предел

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=e$$

$$\lim_{x\to 0}(1+y)^{\frac{1}{y}}=e \qquad \textbf{(2.10.)}$$

Приемы вычисления пределов

При вычислении пределов нужно вместо переменной в выражение, стоящее под пределом подставить значение к которому стремиться эта переменная, попытаться вычислить, используя свойства пределов, 1-й и 2-й замечательные пределы. Если получается неопределенность, то определить ее тип и устранить эту неопределенность (см ниже).

Раскрытие неопределенностей вида $\left[\frac{0}{0}\right]$ **(3.11.)**

Если функция, стоящая под знаком предела является дробно-рациональной, то числитель и знаменатель необходимо разложить на множители, после выполнить сокращение.

Пример 2.1.

Вычислить $\lim\limits_{x\to 1}\frac{2x^2-x-1}{(x-1)^2}$

Решение:

$$\lim_{x\to 1}\frac{2x^2-x-1}{(x-1)^2}=\left[\frac{0}{0}\right]$$

$$\lim_{x\to 1}\frac{2x^2-x-1}{(x-1)^2}=$$

разложим числитель и знаменатель на множители

$$=\lim_{x\to 1}\frac{(2x+1)(x-1)}{(x-1)^2}=$$

сократим дробь на множитель $(x-1)$, сокращение возможно, т.к. при $x\to 1$ выражение $(x-1)\to 0$, но $(x-1)\neq 0$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{(2x+1)}{(x-1)}=\infty$$

т.к. $x\to 1$, то $(2x+1)\to 3,\quad (x-1)\to 0$

при $x\to 1$ получаем что выражение стоящее под пределом $\frac{3}{0}\to\infty$ (см табл. **(3.1.)** строка 2)

Пример 2.2.

Вычислить $\lim\limits_{x\to 2}\frac{\sqrt{x+2}-\sqrt{6-x}}{x^2-4}$

Решение:

$$\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{x+2}-\sqrt{6-x}}{x^2-4}=\left[\frac{0}{0}\right]$$

$\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{x+2}-\sqrt{6-x}}{x^2-4}=$ — домножим числитель и знаменатель на выражение сопряженное с числителем

$\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{(\sqrt{x+2}-\sqrt{6-x})(\sqrt{x+2}+\sqrt{6-x})}{(x^2-4)(\sqrt{x+2}+\sqrt{6-x})}=$ — в числителе воспользуемся формулой сокращенного умножения – «разность квадратов»

$\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{2x-4}{(x^2-4)(\sqrt{x+2}+\sqrt{6-x})}=$ — в числителе вынесем общий множитель 2 за скобку

$\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{2(x-2)}{(x-2)(x+2)(\sqrt{x+2}+\sqrt{6-x})}=$ — т.к. $x\to 2,\, но\ x\neq 2$, то можно сократить на скобочку *(x-2)*

$\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{2}{(x+2)(\sqrt{x+2}+\sqrt{6-x})}=\dfrac{1}{8}$ — подставим вместо х значение, к которому стремиться х (т.е. число 2), получим $\dfrac{1}{8}$

Раскрытие неопределенностей вида $\left[\dfrac{\infty}{\infty}\right]$ **(2.12.)**

Если функция, стоящая под пределом – это отношение многочленов степеней *n* и *m* (где *n*-наивысшая степень числителя, *m* – наивысшая степень знаменателя), то удобно пользоваться следующей формулой:

$$\lim_{x\to 2}\frac{a_1x^n+b_1x^{n-1}+...+k_1x+l_1}{a_2x^m+b_2x^{m-1}+...+k_2x+l_2}=\begin{cases}0,\ если\ \ n<m\\ \dfrac{a_1}{a_2},\ если\ \ n=m\\ \infty,\ если\ \ n<m\end{cases}\quad (3.$$

Пример2.3.

а) Вычислить $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2+2}{4x^5+x+1}$

Решение:

$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2+2}{4x^5+x+1}=\left[\dfrac{\infty}{\infty}\right]=0$ — Воспользуемся формулой **(2.12.)** *n*=2, *m*=5, т.к. *n*<*m*, то предел равен 0

в) Вычислить $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt[4]{x^9+1}}{x^2+\sqrt{x}}$

Решение:

$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt[4]{x^9+1}}{x^2+\sqrt{x}}=\left[\dfrac{\infty}{\infty}\right]=\infty$ — Воспользуемся формулой **(2.12.)** *n*=$\dfrac{9}{4}$, *m*=2, т.к. *n*>*m*, то предел равен ∞

Пример 2.4.

Вычислить $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2^{x+1}+3^{x+1}}{2^x+3^x}$

Решение:

$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2^{x+1}+3^{x+1}}{2^x+3^x}=\left[\dfrac{\infty}{\infty}\right]=$	разделим числитель и знаменатель на 3^x (выбор функции 3^x объясняется тем, что функция 3^x растет быстрее функции 2^x
$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\dfrac{2\cdot 2^x}{3^x}+\dfrac{3\cdot 3^x}{3^x}}{\dfrac{2^x}{3^x}+\dfrac{3^x}{3^x}}=$	преобразуем числитель и знаменатель
$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2\cdot\left(\dfrac{2}{3}\right)^x+3}{\left(\dfrac{2}{3}\right)^x+1}=3$	при $x\to+\infty,\left(\dfrac{2}{3}\right)^x\to 0$

Пример 2.5.

Вычислить $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4x+Sin\,x}{x-Cos\,x}$

Решение:

$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4x+Sin\,x}{x-Cos\,x}=\left[\dfrac{\infty}{\infty}\right]=$ разделим числитель и знаменатель на x, чтобы преобразовать (подвести) к 1-му замечательному пределу

$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\frac{4x}{x}+\frac{Sin\,x}{x}}{\frac{x}{x}-\frac{Cos\,x}{x}}=$ выполним сокращения

$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4+\frac{Sin\,x}{x}}{1-\frac{Cos\,x}{x}}=4$

при $x\to\infty,\ \dfrac{Sin\,x}{x}\to 0$ (как отношение ограниченной функции $Sin\,x$ к бесконечно большой, см **(3.5.)**)

при $x\to\infty,\ \dfrac{Cos\,x}{x}\to 0$ (как отношение ограниченной функции $Cos\,x$ к бесконечно большой см **(3.5.)**)

Задания для закрепления темы «Свойства пределов. Приемы вычисления пределов»

Вариант 1	**Вариант 2**	**Вариант 3**	**Вариант 4**
1) Вычислите $\lim\limits_{x\to3}(x^2-5x+3)$	1) Вычислите $\lim\limits_{x\to-4}(5-3x-x^2)$	1) Вычислите $\lim\limits_{x\to1}(x^3-3x+4)$	1) Вычислите $\lim\limits_{x\to-3}(5+2x+x^2)$
2) Вычислите: $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{3x-2}{5x^2+4}$	2) Вычислите: $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x^2-x+1}{x-3}$	2) Вычислите: $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{3}{2x-6}$	2) Вычислите: $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{x^3-x}{4x-4}$
3) Вычислите: $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n+2}$	3) Вычислите: $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x+3}{1-5x}$	3) Вычислите: $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2}{x^2+3x}$	3) Вычислите: $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4x^2-5x}{x^3-3x^2+1}$
4) Вычислите: $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{5+n-3n^2}{4-n+2n^2}$	4) Вычислите: $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3n^2-5n+1}{2n^3+3n^2}$	4) Вычислите: $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2-5x+4}{x^2+2x+3}$	4) Вычислите: $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5x^2+x+1}{0{,}3x^2-x}$
5) Вычислите: $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{x^2-5x+6}{3x^2-9x}$	5) Вычислите: $\lim\limits_{x\to5}\dfrac{x^2-8x+15}{x^2-25}$	5) Вычислите: $\lim\limits_{x\to-3}\dfrac{2x^2+x-15}{3x^2+7x-6}$	5) Вычислите: $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{x-3}{x^2-8x+15}$

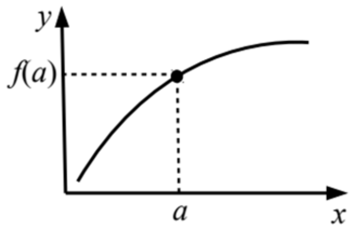
Тема 2.3. Предел и непрерывность функции.

Определение. Функция f(x), определенная в некоторой окрестности U(a) точки a, называется ***непрерывной в этой точке***, если $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$

Замечание. Непрерывность функции предполагает, что эта функция определена в некоторой окрестности точки a, включая саму точку a.

Геометрическая интерпретация

Графически непрерывность функции в точке a означает, что ее график в окрестности точки a представляет собой сплошную линию, которая не претерпевает каких-либо разрывов при переходе через саму точку a.

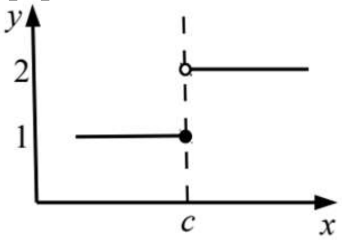


Односторонняя непрерывность

Определение. Пусть функция f(x) определена на полуинтервале $(a,c]$. Функция f(x) называется ***непрерывной слева*** в точке c, если $\lim_{x \to c-0} f(x) = f(c)$

Определение. Пусть функция f(x) определена на полуинтервале $(c,b]$. Функция f(x) называется ***непрерывной справа*** в точке c, если $\lim_{x \to c+0} f(x) = f(c)$

Пример функции, непрерывной слева



$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \le c \\ 2, & x > c \end{cases}$$

Точки разрыва

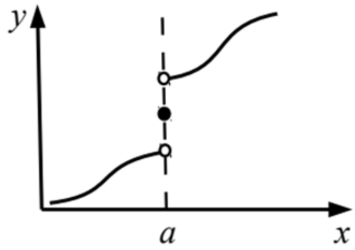
Определение. Точка a называется ***точкой разрыва*** функции f(x), если f(x) не определена в точке a или определена, но не является в ней непрерывной.

Классификация точек разрыва

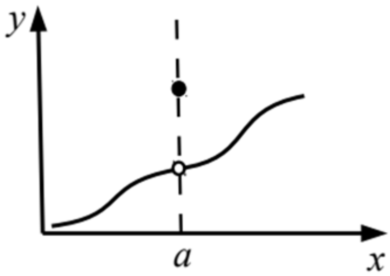
1. Если точка a – точка разрыва функции f(x) и существуют конечные пределы
   $f(a-0) = \lim_{x \to a-0} f(x)$
   $f(a+0) = \lim_{x \to a+0} f(x)$, то точка ***разрыва первого рода.***
2. Если точка a – точка разрыва первого рода и $f(a-0) = f(a+0)$,
   то a называется точкой ***устранимого разрыва***.
3. Точка разрыва функции f(x), не являющаяся точкой разрыва первого рода, называется точкой разрыва ***второго рода***.

Примеры:

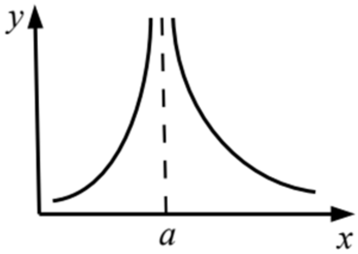
1) Точка разрыва 1-го рода



2) Точка устранимого разрыва



3) Точка разрыва 2-го рода



Алгоритм исследования функции на непрерывность.

1) Найти точки разрыва (либо даны, либо находим по области определения функции).

2) Найти левосторонний и правосторонний пределы в точке разрыва:

а) если хотя бы один из этих пределов не существует или равен ∞, то точка разрыва 2го рода;

б) если односторонние пределы конечны и равны между собой, то точка разрыва 1го рода – устранимого;

в) если односторонние пределы конечны и не равны между собой, то точка разрыва 1го рода – конечного.

3) Найти асимптоты к графику функции (если это возможно):

а) Вертикальные: x=a, если x=a – точка разрыва 2го рода,

т.е. $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \infty$

б) Горизонтальные: y=b, если $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = b$, сколько конечных пределов, столько и асимптот.

в) Наклонные: y=kx+b, коэффициенты находятся по формулам:

$$k = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x}, \qquad (3)$$

$$b = \lim_{x \to \pm\infty} [f(x) - kx] \qquad (4)$$

если к=0, то наклонных асимптот нет.

4) Схематично построить график функции

Пример Исследовать на непрерывность и построить схематично график функции $y = \frac{x}{x-3}$

Решение: 1) D(y): $x - 3 \neq 0, x \neq 3$, следовательно x_0=3 – точка разрыва

2) $f(3-0) = \lim_{x \to 3-0} \frac{x}{x-3} = \frac{3-0}{3-0-3} = -\infty$ левосторонний предел

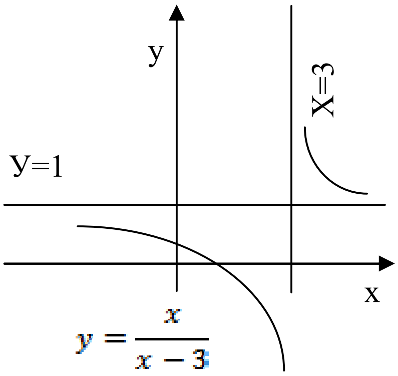
$f(3+0) = \lim_{x \to 3+0} \frac{x}{x-3} = \frac{3+0}{3+0-3} = +\infty$ правосторонний предел, следовательно x_0=3 – точка разрыва 2го рода

3) асимптоты: а) $\lim_{x \to 3} \frac{x}{x-3} = \frac{3}{3-3} = \infty$, следовательно x=3 – вертикальная асимптота

б) $\lim_{x \to +\infty} \frac{x}{x-3} = 1$ $\lim_{x \to -\infty} \frac{x}{x-3} = 1$, следовательно y=1 – горизонтальная асимптота

в)по формуле (3): $k = \lim_{x \to \infty} \left(\frac{x}{x-3}\right) \div x = 0$ наклонных асимптот нет

4) изобразим график функции:



Пример Исследовать на непрерывность и построить схематично график функции

$$y = \begin{cases} x+1, x < 1 \\ 2+x, 1 \leq x \leq 2 \\ 2x^2, x > 2 \end{cases}$$

Решение: 1) x_0=1 и x_0=2 – точки разрыва

2) $f(1-0) = \lim_{x \to 1-0} (x+1) = 2$ левосторонний предел

$f(1+0) = \lim_{x \to 1+0} (2+x) = 3$ правосторонний предел, $2 \neq 3$

следовательно x_0=1 – точка разрыва 1го рода конечного

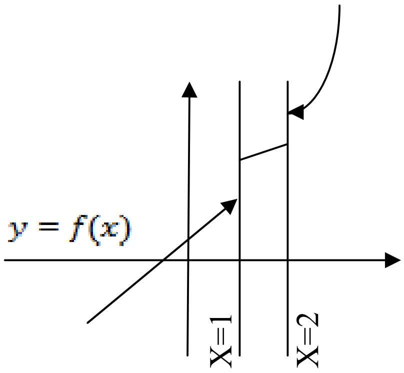
$f(2-0) = \lim_{x \to 2-0} (2+x) = 4$ левосторонний предел

$f(2+0) = \lim_{x \to 2+0} (2x^2) = 8$ правосторонний предел, $4 \neq 8$

следовательно x_0=2 – точка разрыва 1го рода конечного

3) асимптот нет

4) для построения определим необходимые точки для каждой части графика (рис. 3): $y = x + 1$ прямая (0,1), (-1,0)
$y = 2 + x$ прямая (1,3), (2,4)
$y = 2x^2$ парабола ветви вверх (3,8), (4, 32)
изобразим график функции:



Задания для закрепления темы «Предел и непрерывность функции»

Вариант 1. Исследовать на непрерывность и построить график:

а) $y = \frac{x^2}{2x-4}$ б) $y = \begin{cases} x + 4, x < -1 \\ x^2 + 2, -1 \le x < 1 \\ 2x, x \ge 1 \end{cases}$

Вариант 2. Исследовать на непрерывность и построить график:

а) $y = \frac{4}{5-x}$ б) $y = \begin{cases} x - 2, x < 0 \\ 2, x = 0 \\ x^2 - 2, x > 0 \end{cases}$

Вариант 3. Исследовать на непрерывность и построить график:

а) $y = \frac{x^2}{x-6}$ б) $y = \begin{cases} x + 2, x \le -1 \\ x^2 + 1, -1 < x \le 1 \\ 3 - x, x > 1 \end{cases}$

Вариант 4. Исследовать на непрерывность и построить график:

а) $y = \frac{3}{1-2x}$ б) $y = \begin{cases} x - 2, x < 0 \\ -2, x = 0 \\ -x - 2, x > 0 \end{cases}$

РЕЦЕНЗИЯ
на Учебно-методическое пособие
по дисциплине «Математика»

преподавателя
Волгоградского филиала ФГБОУ инклюзивного высшего образования
«Московский государственный гуманитарно-экономический университет»

САРАФАНОВОЙ ОЛЬГИ ВЛАДИМИРОВНЫ

Учебно-методическое пособие предназначено для студентов укрупненных групп специальностей 09.00.00 Информатика и вычислительная техника, 10.00.00 Информационная безопасность, изучающих дисциплину «Математика», а также для преподавателей математики.

Учебно-методическое пособие содержит раздел «Матрицы и определители», который состоит из четырех тем: 1.1. Понятие матрицы, виды матриц, операции над матрицами, 1.2. Определители, 1.3. Обратная матрица, 1.4. Системы линейных уравнений; раздел «Предел числовой последовательности. Предел функции», который состоит из трех тем: 2.1. Предел числовой последовательности. Понятие предела функции, 2.2. Свойства пределов. Приемы вычисления пределов, 2.3. Предел и непрерывность функции.

Учебно-методическое пособие направлено на достижение следующих целей: формирование знаний, умений, навыков и компетенций у студентов с пониманием места и роли математики в современном мире; развитие их интеллекта и способностей к логическому и алгоритмическому мышлению; обучение основным математическим методам, необходимым для анализа и моделирования устройств, процессов и явлений при поиске оптимальных решений для осуществления научно-технического прогресса и выбора наилучших способов реализации этих решений, методам обработки и анализа результатов численных и натурных экспериментов и использование их в профессиональной деятельности.

В представленном учебно-методическом пособии предложены средства для достижения указанных целей. Последовательность изложения тем логична и обоснована с дидактической точки зрения. Каждая тема раздела снабжена не только теоретическим, но и основными примерами решения типовых задач. Практические примеры имеют подробные пояснения, что будет способствовать более успешному самостоятельному изучению материала. В каждом разделе имеются задания для самостоятельной работы.

Представленное на рецензию пособие соответствует требованиям ФГОС СПО и может быть рекомендовано к использованию в учреждениях СПО в качестве учебно-методического пособия на занятиях по дисциплине математика, а также в качестве дополнительного материала при изучении отдельных тем и/или разделов.

Рецензент:

К.п.н., доцент,
заведующий кафедрой естественных наук
и профессиональных коммуникаций
АНО ВО «Волгоградский институт бизнеса» _________________ / И.Н.Гвоздкова

Подпись _______ удостоверяю.
«14» _______ 20 21 г.

РЕЦЕНЗИЯ

на Учебно-методическое пособие по дисциплине «Математика»

преподавателя

Волгоградского филиала Федерального Государственного бюджетного образовательного учреждения инклюзивного высшего образования Московского государственного гуманитарно-экономического университета

Сарафановой Ольги Владимировны

Учебно-методическое пособие по дисциплине «Математика» предназначено для изучения дисциплины математика в профессиональных образовательных организациях, реализующих ФГОС СПО.

Учебно-методическое пособие разработано на основе требований ФГОС СПО, в частности ФГОС 10.02.05 Обеспечение информационной безопасности автоматизированных систем, ФГОС, 09.02.05 Прикладная информатика (по отраслям), ФГОС 09.02.07 Информационные системы и программирование.

В учебно-методическом пособии рассмотрены следующие разделы «Основы линейной алгебры» и «Предел функции».

Учебно-методическое пособие направлено на достижение следующих целей: формирование знаний, умений, навыков и компетенций у студентов с местом и ролью математики в современном мире; развитие их интеллекта и способностей к логическому и алгоритмическому мышлению; обучение основным математическим методам, необходимым для анализа и моделирования устройств, процессов и явлений при поиске оптимальных решений для осуществления научно-технического прогресса и выбора наилучших способов реализации этих решений, методам обработки и анализа результатов численных и натурных экспериментов и использование их в профессиональной деятельности.

Учебно-методическое пособие может быть использовано в качестве учебного пособия на уроках по дисциплине математика, а также в качестве дополнительного материала при изучении отдельных тем и/ или разделов.

В учебно-методическом пособии сформулированы цели и результаты, на достижение которых оно направлено.

Последовательность изложения тем внутри каждого раздела логично и обосновано с дидактической точки зрения. Каждая тема каждого раздела снабжена не только теоретическим материалом, но и основными примерами. Практические примеры снабжены подробными пояснениями, что будет способствовать более успешному и самостоятельному изучения материала.

Учебно-методическое пособие соответствует требованиям ФГОС СПО и может быть рекомендовано к использованию в учреждениях СПО.

Рецензент

Преподаватель высшей квалификационной категории ВФ МГГЭУ ____________ С.В. Кузнецова

М.П.